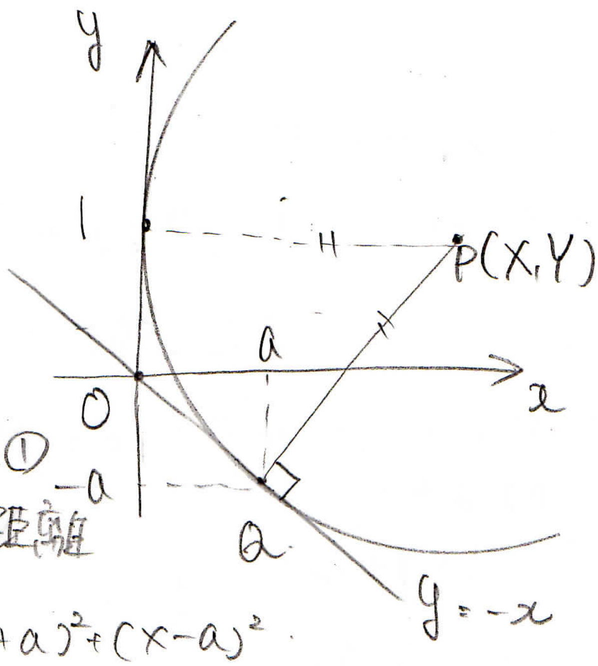
$\boxed{2}$

(1) $y=-x$との接点を$Q(a,-a)$とする。
直線PQと$y=-x$は直交するから、

$$\frac{Y+a}{X-a}=1$$

$$\Leftrightarrow Y=X-2a \cdots ①$$



PQとPから$(0,1)$までの距離は等しいので、

$$(Y-1)^2+X^2=(Y+a)^2+(X-a)^2$$

$$\Leftrightarrow -2Y+1=2aY+a^2-2aX+a^2 \cdots ②$$

①、②より、X、Yについて連立方程式とみて解くと、

$$\begin{cases} X=a^2+2a+\frac{1}{2} \\ Y=a^2+\frac{1}{2} \end{cases}$$

(2) 交わるときのaの値は、

$$a^2+\frac{1}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

求める面積Sは、

$$S=\int_{x(a_1)}^{x(a_2)} Y\,dX$$

$\frac{dX}{da}=2a+1$より、

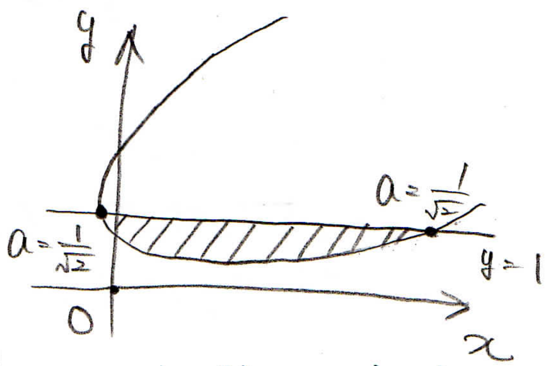
$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(a^2+\frac{1}{2}\right)(2a+1)\,da.$$

$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2a^3+a^2+a+\frac{1}{2}\right)da$$

$$=2\left[\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a\right]_0^{1/\sqrt{2}}$$

($2a^3$, aは奇関数, a^2, $\frac{1}{2}$は偶関数)

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$



※グラフの求め方は動画参照。